

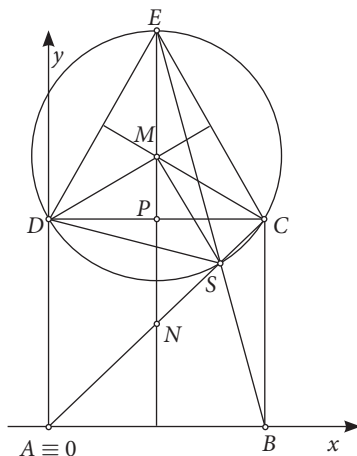
## VIŠE RAZNIH DOKAZA JEDNOG ZADATKA O KVADRATU

Šefket Arslanagić, Sarajevo

U prošlom broju objavljen je članak pod nazivom Četiri rješenja zadatka o jednakokračnom trokutu. U ovom članku pokazat ćemo više raznih dokaza jednog zadatka o kvadratu. Pri tome ćemo koristiti više važnih činjenica iz geometrije, kao što su: osna simetričnost trokuta, jednakost obodnih kutova nad istom tetivom (lukom) kružnice, poučak o vanjskom kutu trokuta, Talesov poučak, poučak o simetrali unutarnjeg kuta trokuta te na kraju jednadžba pravca kroz jednu te dvije točke, rješavanje sustava linearnih jednadžbi, izračunavanje udaljenosti između dvije točke, itd.

Riječ je o sljedećem zadatku:

Nad stranicom  $\overline{CD}$  kvadrata  $ABCD$  konstruiran je jednakokranični trokut  $\triangle CDE$  (kao na slici). Neka je točka  $M$  središte ovom trokutu opisane kružnice, a točka  $S$  presjek pravaca  $BE$  i  $AC$ . Dokažimo da je trokut  $\triangle CMS$  jednakokračan.

**Dokaz 1.**

Trokuti  $\triangle BSC$  i  $\triangle DSC$  su osnosimetrični u odnosu na pravac  $AC$ , stoga vrijedi da je

$$|\angle SBC| = |\angle SDC|. \quad (1)$$

Očito je:

$$|\angle SBC| = |\angle EBC|, \quad (2)$$

kao i

$$|\angle SBC| = |\angle CBE| \quad (3)$$

(jer je trokut  $\triangle BCE$ , zbog  $|BC| = |CE|$ , jednakokračan), a odatle je

$$|\angle SBC| = |\angle SEC|. \quad (4)$$

Sada iz (1), (2), (3) i (4) slijedi da je

$$|\angle SEC| = |\angle SDC|. \quad (5)$$

Iz (5) slijedi da točke  $E$  i  $D$  pripadaju istoj kružnici (nad tetivom  $\overline{CS}$ ) koja je opisana trokutu  $\triangle DSC$ , a čije je središte u točki  $M$ . Dakle, vrijedi:

$$|MS| = |MC|,$$

što znači da je trokut  $\triangle CMS$  jednakokračan, a to je i trebalo dokazati.



**Dokaz 2.** Imamo  $|\angle DCB| = 90^\circ$  te  $|\angle ACB| = |\angle BAS| = 45^\circ$  i  $|\angle ECD| = 60^\circ$ . Dalje slijedi da je  $|\angle ECB| = 90^\circ + 60^\circ = 150^\circ$ , a kako je trokut  $\triangle BCE$  jednakokračan, vrijedi da je

$$|\angle CBE| = |\angle BEC| = \frac{1}{2}(180^\circ - |\angle ECB|) = \frac{1}{2}(180^\circ - 150^\circ) = 15^\circ.$$

Kut  $\angle CDE$  je vanjski kut trokuta  $\triangle BSC$  pa imamo:

$$|\angle CSE| = |\angle CBS| + |\angle SCB| = |\angle CBE| + |\angle SCB| = 15^\circ + 45^\circ = 60^\circ = |\angle CDE|.$$

Odavde opet slijedi da točke  $S$  i  $D$  pripadaju istoj kružnici nad tetivom  $\overline{CE}$  koja je opisana trokutu  $\triangle DSC$  čije je središte u točki  $M$ . Dakle, vrijedi:

$$|MS| = |MC|,$$

što znači da je trokut  $\triangle CMS$  jednakokračan, a to je i trebalo dokazati.

**Dokaz 3.** Ne umanjujući općenitost, uzet ćemo da je  $|AB| = |BC| = |CD| = |DA| = |CE| = |DE| = 1$ . U tom slučaju redom dobivamo:

$$|EP| = \frac{\sqrt{3}}{2}, |PN| = \frac{1}{2}, |ME| = |MC| = \frac{2}{3}|EP| = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$|NM| = |MP| + |PN| = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} \text{ i } |NE| = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

Zbog  $NE \parallel BC$ ,  $S \in AC$ ;  $S \in BE$ , na temelju Talesovog poučka, vrijedi da je

$$\frac{|NS|}{|CS|} = \frac{|NE|}{|CB|} = \frac{|NE|}{1} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2}.$$

Odavde, zbog  $|NM| = \frac{3 + \sqrt{3}}{6}$  i  $|ME| = \frac{\sqrt{3}}{3}$ , vrijedi da je

$$\frac{|NS|}{|CS|} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{6}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{6} = \frac{|NM|}{|ME|}, \text{ tj.}$$

$$MS \parallel EC,$$

odakle na temelju Talesovog poučka slijedi:

$$\frac{|MS|}{|EC|} = \frac{|NM|}{|NE|} \Rightarrow |MS| = |EC| \cdot \frac{|NM|}{|NE|} = 1 \cdot \frac{\frac{3 + \sqrt{3}}{6}}{\frac{1 + \sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})}{6(1 + \sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}}{3} = |MC|, \text{ tj.}$$

$$|MS| = |MC|,$$

što znači da je trokut  $\triangle CMS$  jednakokračan, a to je i trebalo dokazati.





**Dokaz 4.** Ne umanjujući općenitost, uzet ćemo opet da duljine stranica kvadrata  $ABCD$  i duljine stranica jednakokraničnog trokuta  $\triangle DEC$  iznose 1.

$$\text{Tada vrijedi da je } |NP| = \frac{1}{2}, |MP| = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{6}, |ME| = |MC| = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Budući da je  $NE \parallel BC$  i  $|BC| = |CE| = 1$ , na temelju Talesovog poučka dobivamo:

$$\frac{|NS|}{|CS|} = \frac{|NE|}{|CB|} = \frac{|NE|}{|CE|},$$

što znači da točka  $S$  dijeli stranicu  $\overline{NC}$  trokuta  $\triangle NEC$  u omjeru ostalih dviju stranica  $\overline{NE}$  i  $\overline{CE}$ ; dakle pravac  $ES$  simetrala je unutarnjega kuta  $\angle NEC$  trokuta  $\triangle NEC$  pa vrijedi

$$|\angle MES| = \frac{1}{2} |\angle MEC| = \frac{1}{4} |\angle DEC| = 15^\circ.$$

Dalje imamo:

$$\frac{|NM|}{|MC|} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{3 + \sqrt{3}}{6}}{\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} + 1)}{2\sqrt{3}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2} = \frac{|NE|}{|CE|} = \frac{|NS|}{|SC|}.$$

Oдавде zaključujemo da je  $\overline{MS}$  simetrala unutarnjeg kuta  $\angle NMC$  trokuta  $\triangle NMC$ , te da je  $|\angle NMS| = \frac{1}{2} |\angle NMC| = 30^\circ$ . Dalje je

$$|\angle SME| = 180^\circ - |\angle NMS| = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ.$$

Sada iz trokuta  $\triangle SME$  slijedi:

$$|\angle ESM| = 180^\circ - 150^\circ - 15^\circ = 15^\circ = |\angle MES|,$$

što znači da je trokut  $\triangle EMS$  jednakokraničan s osnovicom  $\overline{ES}$  pa je  $|MS| = |ME| = |MC|$ , tj. trokut  $\triangle CMS$  je jednakokraničan, što je i trebalo dokazati.

**Dokaz 5.** Za ovaj dokaz koristit ćemo koordinatnu metodu. Uzet ćemo da je  $O \equiv A(0,0)$ ,  $B(a,0)$ ,  $C(a,a)$ ,  $D(0,a)$ , tj.  $Ox \equiv AB$ ,  $Oy \equiv AD$ . Dalje imamo da je  $E\left(\frac{a}{2}, a + \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$ ,  $M\left(\frac{a}{2}, a + \frac{a\sqrt{3}}{6}\right)$ . Ne umanjujući općenitost, možemo uzeti da je  $a = 6$ . Tada je:  $A(0,0)$ ,  $B(6,0)$ ,  $C(6,6)$ ,  $D(0,6)$ ,  $E(3, 6 + 3\sqrt{3})$  i  $M(3, 6 + \sqrt{3})$ . Pravac  $AC$  simetrala je kuta od  $90^\circ$  pa jednadžba pravca  $AC$  glasi:

$$y = x.$$

Pravac  $BE$  ima jednadžbu oblika  $y = kx + n$ . Budući da točke  $B$  i  $E$  pripadaju tome pravcu, vrijedi:

$$0 = 6k + n$$



i

$$6 + 3\sqrt{3} = 3k + n,$$

a odavde je redom:

$$6 + 3\sqrt{3} = 3k - 6k$$

$$3k = -(6 + 3\sqrt{3}) : 3$$

$$k = -(2 + \sqrt{3}), \text{ te}$$

$$n = -6k = 6(2 + \sqrt{3}) = 12 + 6\sqrt{3}.$$

Dakle, jednačina pravca  $BE$  glasi:

$$y = -(2 + \sqrt{3})x + 12 + 6\sqrt{3}.$$

Budući da je točka  $S$  presjek pravaca  $AC$  i  $BE$ , to su koordinate točke  $S$  rješenja sustava jednačini:

$$\begin{cases} y = x \\ y = -(2 + \sqrt{3})x + 12 + 6\sqrt{3}. \end{cases}$$

Odavde, nakon kraćeg računanja, dobivamo:

$$y = 3 + \sqrt{3},$$

te zbog  $y = x$  slijedi  $x = 3 + \sqrt{3}$ . Dakle, imamo da je  $S(3 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$ .

Sada imamo:

$$|MC|^2 = \sqrt{(6-3)^2 + (6-6-\sqrt{3})^2} = \sqrt{9+3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3},$$

$$|MS|^2 = \sqrt{(3+\sqrt{3}-3)^2 + (3+\sqrt{3}-6-\sqrt{3})^2} = \sqrt{3+9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3},$$

a odavde slijedi:

$$|MS| = |MC|,$$

što znači da je trokut  $\triangle CMS$  jednakokrakan, a to je i trebalo dokazati.

## Literatura

1. Š. Arslanagić, *Matematika za nadarene*, Bosanska riječ, Sarajevo, 2005.
2. A. Bašić, *Primena metode koordinata u planimetriji i stereometriji, 1. dio*, Nastava matematike, Društvo matematičara Srbije, Vol. LXI, Br. 4, Beograd, 2016
3. A. Marić, *Planimetrija – zbirka riješenih zadataka*, Element, Zagreb, 1996.
4. V. Stošić, *Planimetrija – Odabrani zadaci za osnovnu školu*, Element, Zagreb, 2017.

